

# SYSTEME DE PRISE DE CLICHES MEDICAUX - IMAGERIE MEDICALE -



Le sujet se compose de :

L'énoncé :	18 pages,
Documents techniques :	DT1, DT2 et DT3
Documents réponses :	figures DR1, DR2, DR3, DR4, DR5 et DR6

# I - PRESENTATION

## 1.1. LA PRISE DE CLICHES MEDICAUX

La prise de clichés médicaux est une application particulière de la radiographie rayons X qui permet l'exploration anatomique des vaisseaux sanguins et notamment la visualisation des vaisseaux coronaires.

Pour cette prise de clichés, on administre des produits iodés hydrosolubles injectés à distance et éliminés sélectivement par les reins. Cette technique permet d'obtenir des images de grande qualité par soustraction d'une image obtenue sans produit (image de masque) et d'une image avec produit (image de contraste).

## 1.2. LA RECONSTITUTION D'IMAGE 3D.

La reconstitution d'image tridimensionnelle permet la mise en volume des objets étudiés ce qui en facilite la compréhension (**figures 1 & 2**). Celles-ci sont obtenues grâce à une série d'images planes de masque et de contraste. La qualité de l'image reconstituée est liée à la bonne correspondance entre ces deux images. Le patient doit rester immobile pendant l'examen.

L'obtention d'une image de bonne qualité suppose l'alignement parfait du tube émetteur de rayons X avec le récepteur image ainsi qu'une grande stabilité et une grande rigidité du positionneur.

Le nombre de radiographies pratiquées ainsi que la dose d'exposition au cours d'un examen doivent être limités car les rayons X, à partir d'une certaine quantité, deviennent des agents mutagènes.



Figure 1 : Reconstruction 3D

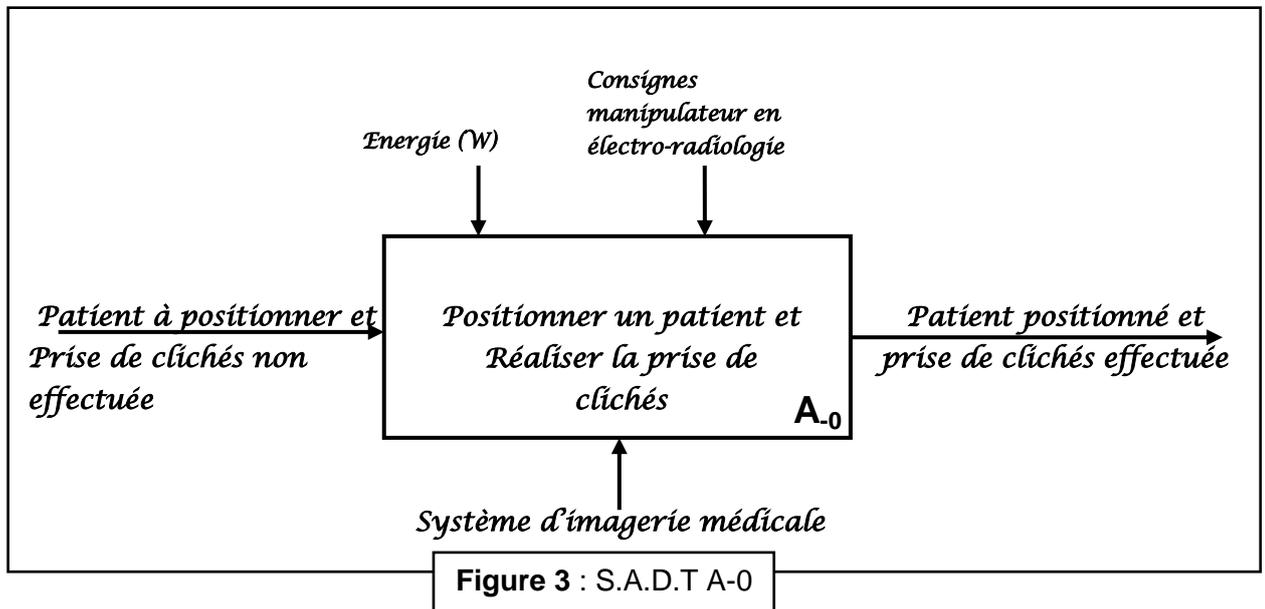


Figure 2 : Reconstruction 3D

Pour réaliser de tels clichés, le sous-système de formation de l'image doit avoir une excellente répétabilité des mouvements utilisés.

### 1.3. LE SYSTEME D'IMAGERIE

Une analyse fonctionnelle préliminaire a permis de fournir le SADT A-O ci-dessous.



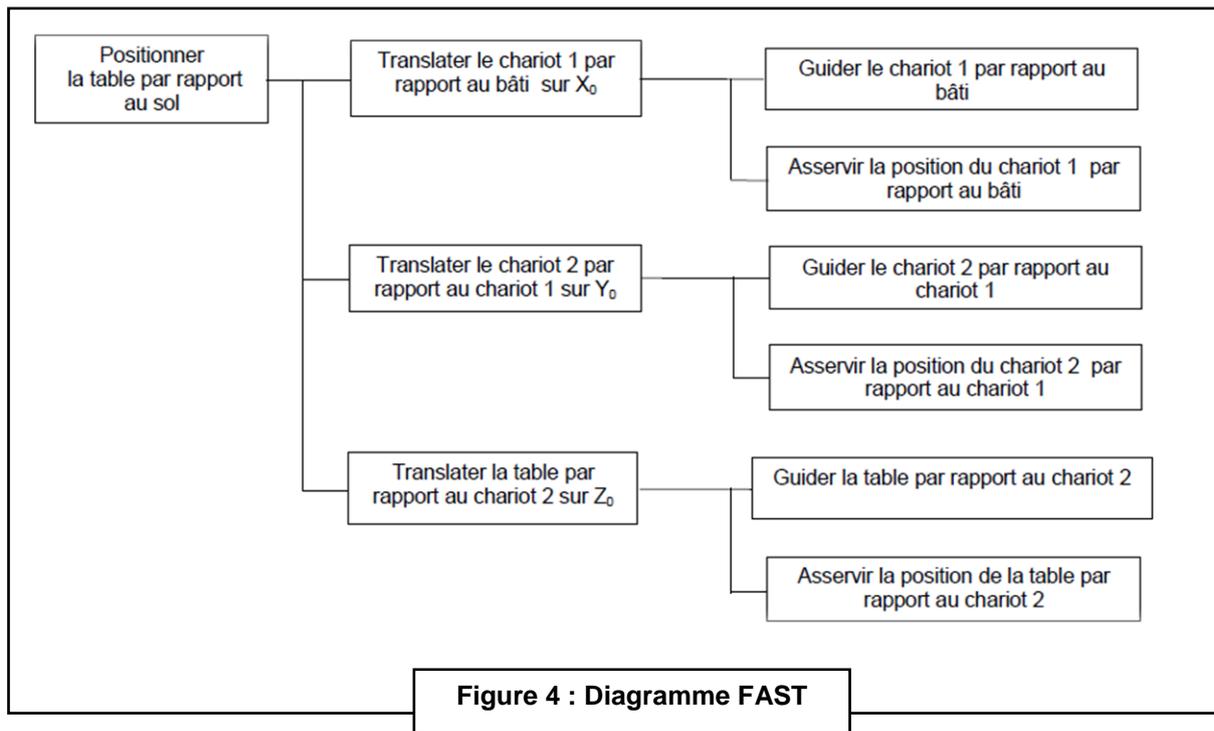
L'architecture du système étudié est définie sur les documents techniques DT1 à DT3. Le système d'imagerie est constitué de :

- un système de positionnement du patient par rapport au sol, constitué d'une table mobile en translation par rapport au sol suivant les directions  $\vec{x}_O$ ,  $\vec{y}_O$  et  $\vec{z}_O$ . Ces trois translations indépendantes permettent de positionner l'organe à ausculter à l'iso-centre O du positionneur (voir DT1-DT2).
- un système de positionnement du faisceau de rayons X par rapport au patient, constitué de l'épaule 1, du bras d'arceau 2 et de l'arceau 3 qui supporte le tube émetteur de rayons X et le récepteur image. Trois mouvements de rotation autour d'axes concourants à l'iso-centre O permettent d'orienter le faisceau de rayons X (voir DT2).
- un système de prise de clichés, constitué du tube émetteur de rayons X, du récepteur image et de l'armoire de traitement numérique de l'image.

**Question 1 :** sur le document réponse (figure DR1), compléter le SADT niveau A0 (A zéro) du système d'imagerie médicale.

Le diagramme FAST partiel de la figure 4 permet de traduire le positionnement de la table et donc du patient par rapport au sol.

**Question 2 :** A l'aide du diagramme FAST fourni ci-dessous (figure 4), compléter, sur le document réponse (figure DR2), le schéma cinématique en perspective permettant de définir la structure cinématique de la table.



## II - LE POSITIONNEUR DU SYSTEME D'IMAGERIE

### 2.1. DESCRIPTION

Les documents techniques fournis DT1, DT2 et DT3 décrivent la structure du positionneur étudié.

Pour certains examens spécifiques d'un vaisseau, on souhaite que le faisceau de rayons X reste constamment normal à l'axe du vaisseau à ausculter.

### 2.2. LA PRISE DE CLICHES

Le patient est maintenant correctement positionné par rapport au sol, il reste donc à réaliser le pointage correct du vaisseau à ausculter.

Les mouvements  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $\gamma(t)$  sont indépendants. On s'intéresse pour toute la suite du sujet, uniquement, au déplacement angulaire de l'arceau 3 :  $\alpha(t) = 0$ ,  $\beta(t) = 0$ . Voir DT2.

#### La loi de commande de l'arceau 3 : $\gamma(t)$ (voir figures 5 & 6)

L'objectif de cette partie est :

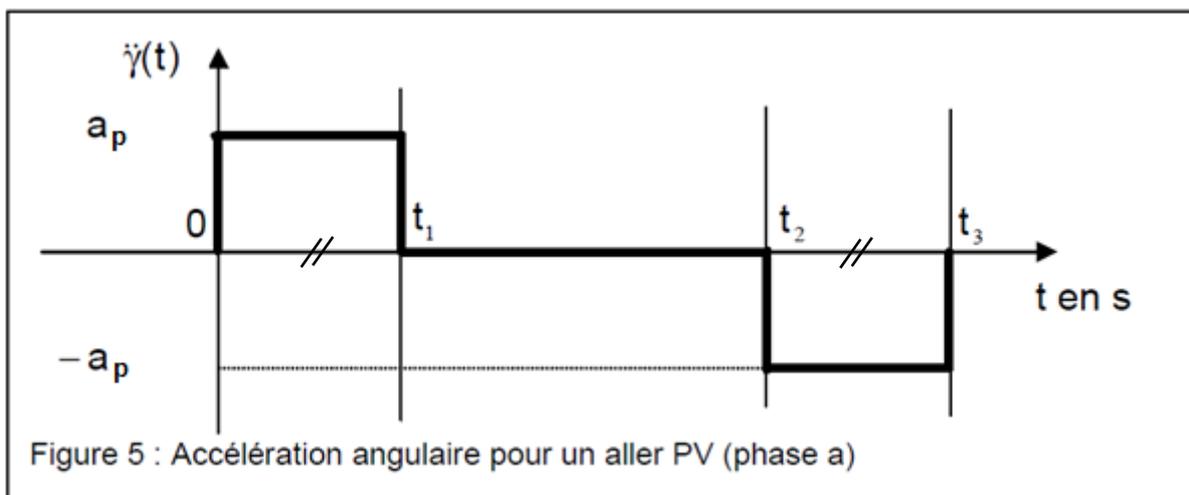
- de calculer les différents paramètres utiles pour le choix du moteur.
- de vérifier l'homogénéité des différentes phases.

L'examen radiologique se déroule suivant différentes phases (voir figures 5 et 6) :

- **Phase a** : premier passage à petite vitesse PV ( $\dot{\gamma}_P = +10^\circ/s$ ) afin de vérifier qu'il n'y a pas de collision avec le patient.
- **Phase b** : retour à grande vitesse GV **au point de départ** ( $\dot{\gamma}_G = -30^\circ/s$ ) après 10s d'attente.
- **Phase c** : second passage à grande vitesse GV ( $\dot{\gamma}_G = +30^\circ/s$ ) afin de réaliser la prise de clichés de masque (pas de produits iodés) après 30s d'attente.
- **Phase d** : retour à grande vitesse GV ( $\dot{\gamma}_G = -30^\circ/s$ ) après 10s d'attente.
- **Phase e** : troisième passage à grande vitesse GV ( $\dot{\gamma}_G = +30^\circ/s$ ) afin de réaliser la prise de clichés de contraste (sous produits iodés) après 30s d'attente
- **Phase f** : retour à grande vitesse GV ( $\dot{\gamma}_G = -30^\circ/s$ ) après 10s d'attente
- **Phase g** : arrêt obligatoire de 10min.

Dans un premier temps, on étudie la **phase a**. Les évolutions de l'accélération angulaire  $\ddot{\gamma}(t)$  de l'arceau 3 sont données figure 5 avec :

$$a_p = 13^\circ/s^2 \quad \dot{\gamma}(t_1) = 10^\circ/s \quad \dot{\gamma}(t_3) = +53^\circ \quad \text{et} \quad \gamma(0) = -47^\circ$$



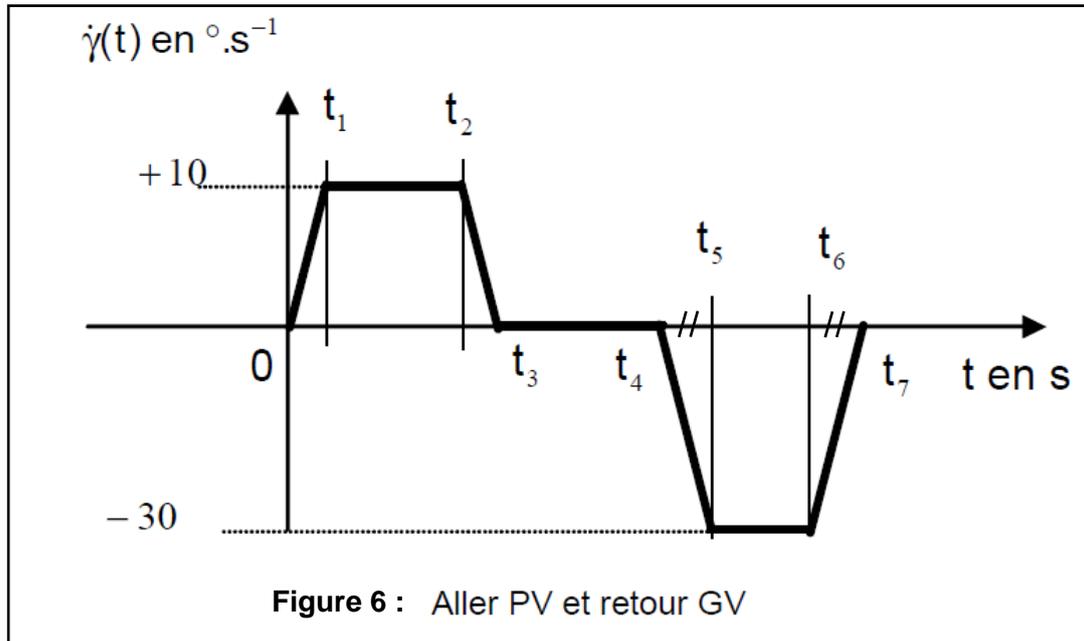
**Question 3** : A partir de la **figure 5**, Tracer sur votre copie l'allure des courbes de la vitesse angulaire  $\dot{\gamma}(t)$  et la position angulaire  $\gamma(t)$  pour l'aller à petite vitesse PV (**phase a**).

**Question 4** :

Nous avons, d'après les valeurs de l'accélération et de la décélération,  $t_3 - t_2 = t_1$ .

Calculer alors les valeurs numériques de  $t_1$ ,  $\gamma(t_1)$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  et  $\gamma(t_2)$ .

Dans un second temps, on étudie l'enchaînement **des phases a et b**. La figure 6 modélise la loi de vitesse angulaire  $\dot{\gamma}(t)$  pour l'ensemble de ces deux phases.



**Question 5 :** On admet les mêmes valeurs absolues d'accélération angulaire et de décélération angulaire pour les **phases a et b**, déterminer la valeur numérique successivement des instants  **$t_4$** ,  **$t_5$** .

**Question 6 :** l'égalité de la valeur absolue de l'accélération et celle de la décélération de la phase b permet d'avoir  **$t_7 - t_6 = t_5 - t_4$** .

- Calculer la valeur numérique de la durée de la course angulaire parcourue de  **$t_4$**  à  **$t_7$**  (durée du retour rapide) noté  $T_{rp}$ .
- Conclure par rapport à la durée de la course angulaire parcourue de **0** à  **$t_3$** .

### III - FONCTION « GUIDER L'ARCEAU 3 PAR RAPPORT AU BRAS D'ARCEAU 2 »

L'objectif de cette partie est d'analyser le guidage en rotation de l'arceau 3 par rapport au bras 2. Les figures 7 et 8 représentent la structure du système de guidage en rotation et montrent la disposition des galets par rapport au bras 2 et à l'arceau 3.

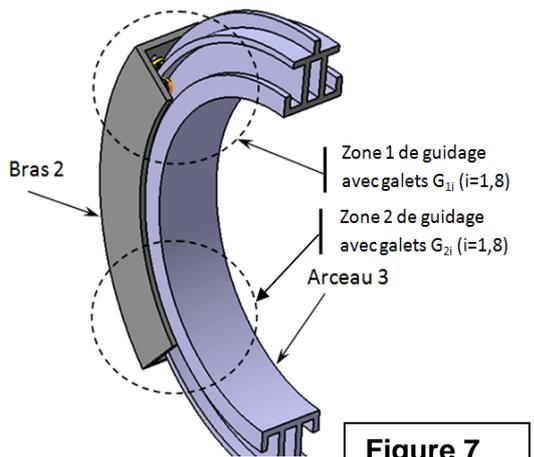


Figure 7

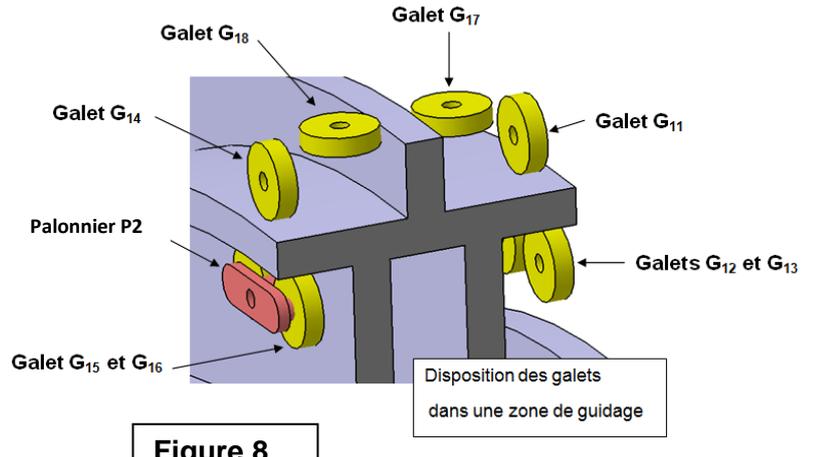


Figure 8

La figure suivante (figure 9) représente le graphe des liaisons d'une zone de guidage.

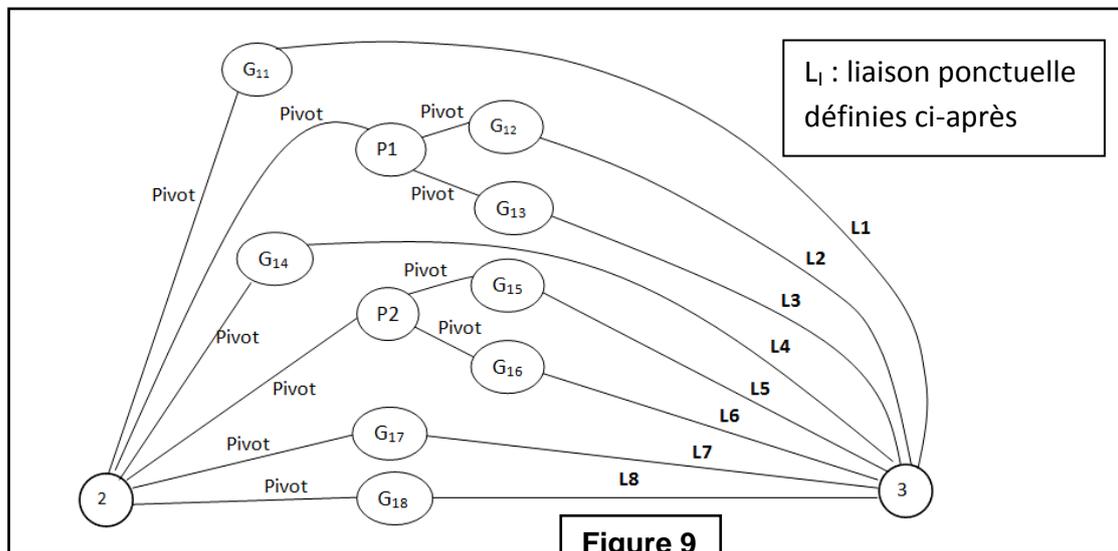


Figure 9

**Hypothèses :**

- Les galets  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{14}$ ,  $G_{15}$  et  $G_{16}$ , sont en contact ponctuel avec frottement et roulement sans glissement, on considérera, donc, deux inconnus statiques pour chaque liaison ponctuelle avec l'arceau 3. l'hypothèse est valable pour les galets  $G_{21}$ ,  $G_{22}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{24}$ ,  $G_{25}$  et  $G_{26}$ .
- Les galets  $G_{17}$  et  $G_{18}$  sont en contact ponctuel dont le glissement est difficile à éviter. On considérera, un inconnu statique pour chaque liaison ponctuelle avec l'arceau 3. l'hypothèse est valable pour les galets  $G_{27}$  et  $G_{28}$ .

**Question 7 :** Par une simple analyse (sans calcul) du mouvement de l'arceau 3 par rapport au bras 2. Donner Le nom de la liaison équivalente entre l'arceau 3 et le bras 2.

**Question 8 :**

- Quelle est la mobilité  $m$  du guidage en rotation
- Calculer le degré d'hyperstatisme  $h$  de cette liaison.
- Quels avantages présentent une liaison hyperstatique.

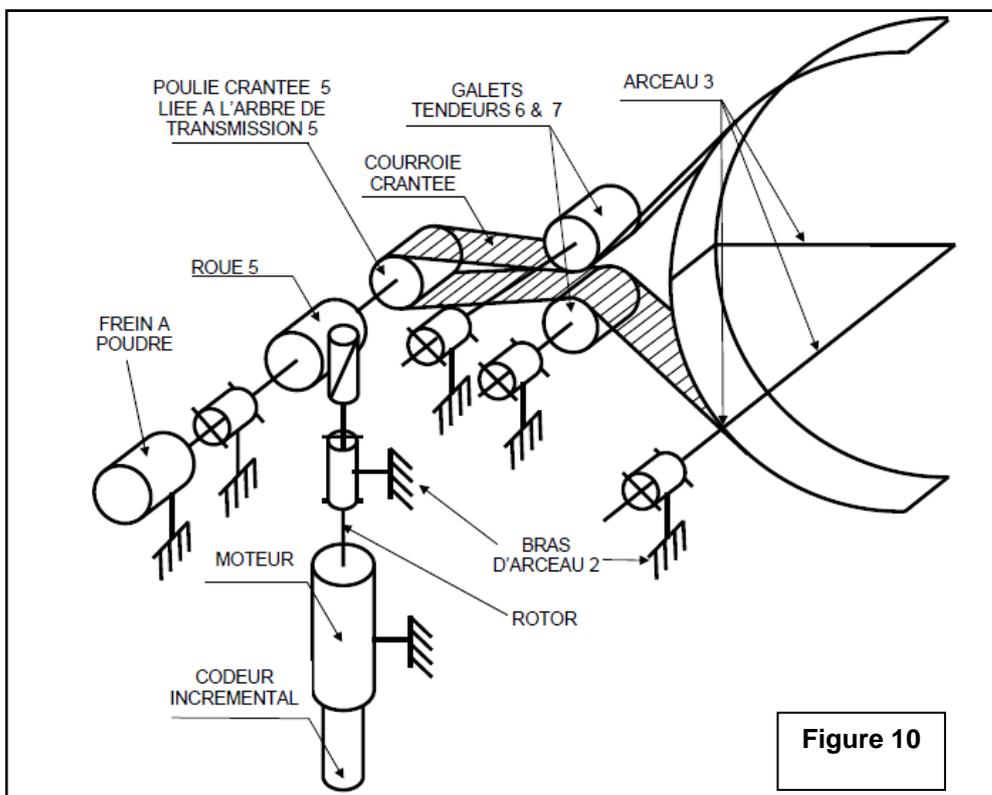
## IV - FONCTION « ENTRAINER L'ARCEAU 3 PAR RAPPORT AU BRAS 2

Cette partie consiste à valider le choix du codeur et le choix du moteur à courant continu. Elle a pour objectifs, également, d'évaluer et de vérifier les performances de la fonction : **ENTRAINER L'ARCEAU 3 PAR RAPPORT AU BRAS 2**

### 4.1 Choix du codeur et choix du moteur à courant continu.

L'objectif de cette étude est de valider la motorisation choisie pour l'entraînement de l'arceau 3 par rapport au bras d'arceau 2.

La chaîne cinématique intervenant dans la commande de la liaison pivot de l'arceau 3 par rapport au bras 2 est décrite par les deux figures suivantes (figures 10 et 11)



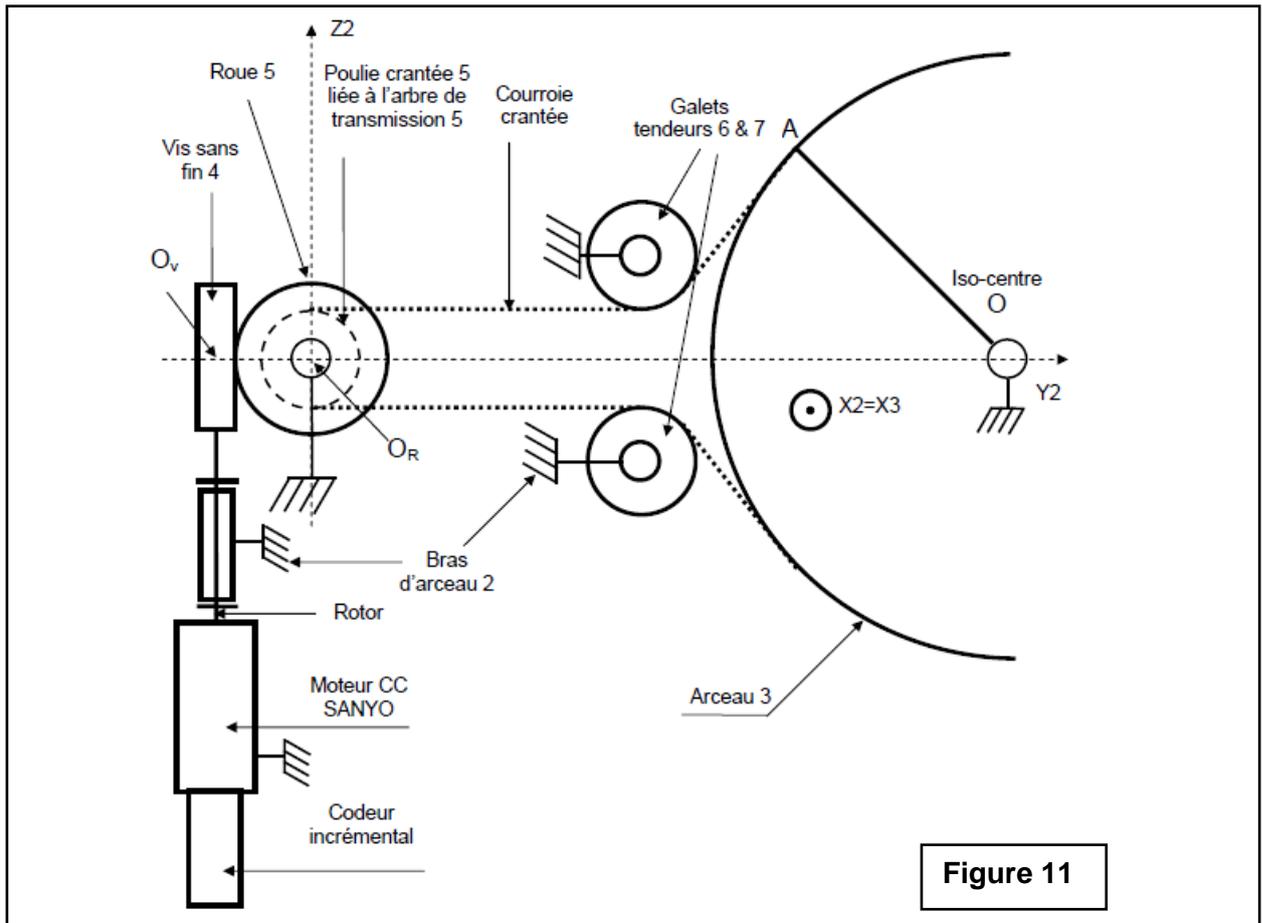


Figure 11

Le tableau suivant résume certaines caractéristiques des éléments constituant la motorisation de l'arceau 3 :

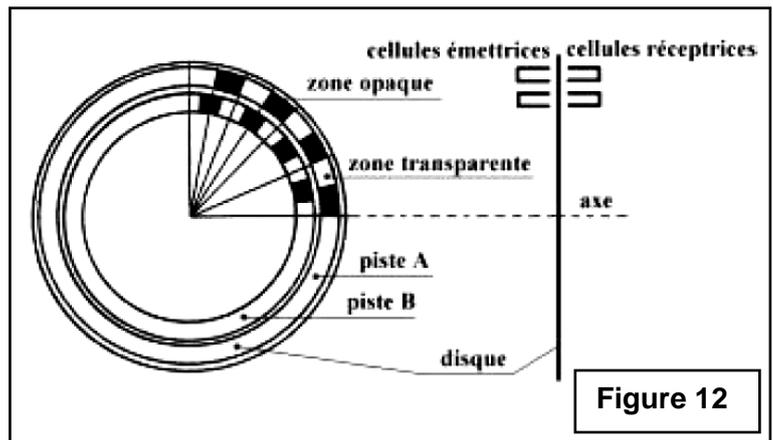
<b>L'arceau 3</b>			
$R=OA$	<b>Rayon de l'arceau 3</b>	720	mm
$m_3$	<b>Masse de l'arceau 3</b>	260	Kg
$K$	<b>Rapport de transmission de la courroie : <math>K = \frac{\omega_{3/2}}{\omega_{5/2}}</math></b>	A déterminer	
<b>Le réducteur roue et vis sans fin</b>			
$\mu$	<b>Rapport de réduction <math>\mu = \frac{\omega_{5/2}}{\omega_{4/2}}</math></b>	$\frac{1}{50}$	
$R_p$	<b>Rayon de la poulie crantée liée à la roue 5</b>	30	mm
$J_v$	<b>Moment d'inertie de la vis sans fin 4 par rapport à son axe</b>	$4 \cdot 10^{-5}$	$Kg \cdot m^2$
$J_R$	<b>Moment d'inertie de L'ensemble rigidement lié à la roue 5 par rapport à son axe</b>	$1 \cdot 10^{-3}$	$Kg \cdot m^2$
<b>Le moteur à courant continu</b>			
$U$	<b>Tension d'induit nominale</b>	180	Volts (V)
$I$	<b>Courant d'induit nominal</b>	10	Ampère (A)

$P_{max}$	<b>Puissance mécanique de sortie</b>	2,7	KW
$J_{mot}$	<b>Moment d'inertie du rotor</b>	$60 \cdot 10^{-5}$	$Kg \cdot m^2$
$C_{nom}$	<b>Couple nominal</b>	4	N.m
$C_{max}$	<b>Couple maxi (valeur crête)</b>	7	N.m
$K_i$	<b>Constante de couple</b>	0,287	$N \cdot m \cdot A^{-1}$
$N$	<b>Fréquence de rotation nominale</b>	2600	$Tr \cdot min^{-1}$
$N_{max}$	<b>Fréquence de rotation maximale</b>	4500	$Tr \cdot min^{-1}$
<b>Le codeur incrémental opto-électronique</b>			
$N_c$	<b>Nombre de traits</b>	250	Par tour
$U_c$	<b>Tension d'alimentation</b>	5	Volts (V)

### 4.1.1 VALIDER LE CODEUR INCREMENTAL

Il s'agit de capteur rotatif opto-électronique de type incrémental.  
C'est un capteur de position angulaire comportant (figure 12) :

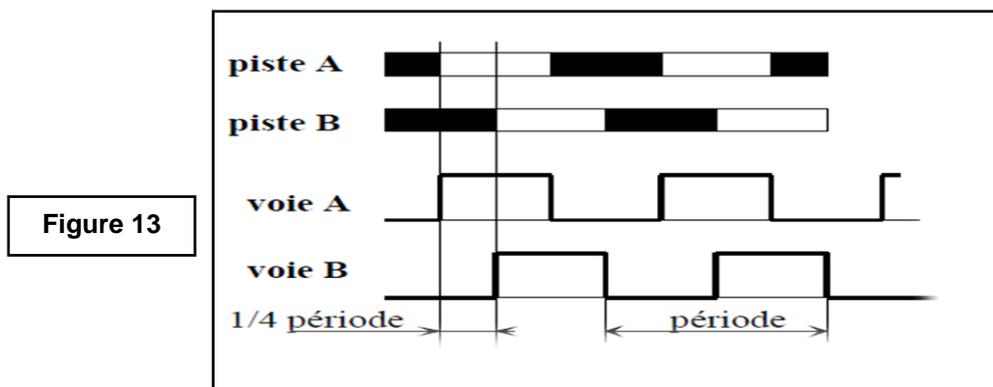
- Un disque optique mobile avec 2 pistes (A et B) comportant chacune une succession de parties opaques et transparentes.
- Deux cellules fixes, pour chaque piste : une cellule émettrice de lumière d'un côté et une réceptrice de l'autre.



Le passage d'une zone transparente à une autre est détecté par les cellules réceptrices. Les 2 pistes sont décalées d'un quart de période et la rotation du disque permet d'avoir les signaux de la figure 13 :

#### Exploitation des voies A et B

Les codeurs incrémentaux permettent 3 niveaux de précision d'exploitation :



- Utilisation des fronts montants de la voie A seule. La résolution est égale au nombre de points ou traits (N).
- Utilisation des fronts montants et descendants de la voie A seule. La résolution est multipliée par 2 (2 x N).
- Utilisation des fronts montants et descendants des voies A et B. La résolution est multipliée par 4 (4 x N).
- La fréquence de l'un des signaux délivré est défini par le nombre de traits par seconde.

**Question 9 :** La courroie est inextensible, donner l'expression et la valeur du rapport  $K = \frac{\omega_{3/2}}{\omega_{5/2}}$

**Question 10 :** Le capteur exploite les fronts montants et descendants des deux voies A et B et la mesure est faite sur l'arbre moteur (rotor). La résolution (précision) requise sur la position de l'arceau 3 est  $\Delta\gamma = 10^{-3}$  degré,

- a. Calculer la résolution (précision) requise sur la position de l'arbre moteur notée  $\Delta\theta_{mot}$  en degré.
- b. Calculer le nombre minimal de traits par tour N que doit posséder le capteur (résolution du capteur). Le capteur retenu est-il convenable ?

**Question 11 :** La figure 13 donne le signal dans un sens de rotation. Donner le signal délivré par le capteur dans le cas de la rotation dans le sens opposé.

**Question 12 :** La vitesse de rotation maximale de l'arceau 3 est  $\dot{\gamma} = 30 \text{ }^\circ \cdot \text{s}^{-1}$ . Déterminer la fréquence correspondante du signal carré de sortie du capteur notée  $f_c$ .

Afin d'exploiter les informations émises par le capteur, une carte électronique permet de compter ou décompter (en fonction du sens de rotation) les fronts montants et descendants des voies A et B.

Nous allons nous intéresser à un compteur permettant de compter les fronts montants de la voie A, réalisé par des bascules JK (voir figure 14) dont le signal de l'horloge est sur front montant.

**Bascule JK : principe de fonctionnement**

Mise à 1 — J

horloge — CLK

Mise à 0 — K

Q — Sortie

Entrées			Etat futur Q	Fonction réalisée
J	K	CLK		
0	0	↑ CLK	Q	Maintien
0	1	↑ CLK	0	Mise à 0
1	0	↑ CLK	1	Mise à 1
1	1	↑ CLK	$\bar{Q}$	Commutation

Sans front montant sur CLK (↑ CLK), la bascule conserve son état.

**Figure 14**

**Question 13 :** Compléter le chronogramme associé à une bascule JK sur le document réponse (figure DR3).

**Question 14 :** Sur le document réponse (figure DR4) :

- a. compléter le tableau de Karnaugh donnant  $Q_{n+1}$  (état de la bascule après le front montant  $n$  de l'horloge) en fonction de  $Q_n$  (état de la bascule avant le front montant  $n$ ), J et K.
- b. Donner l'expression simplifiée de  $Q_{n+1}$ .

**Question 15 :** combien de bascules (nombres de bits) sont nécessaires pour compter de 0 à 1023

**Question 16 :** Sur le document réponse (figure DR5), compléter le logigramme (schéma) d'un compteur asynchrone 3 bits à base des bascules JK.

**4.1.2 CHOIX DU MOTEUR**

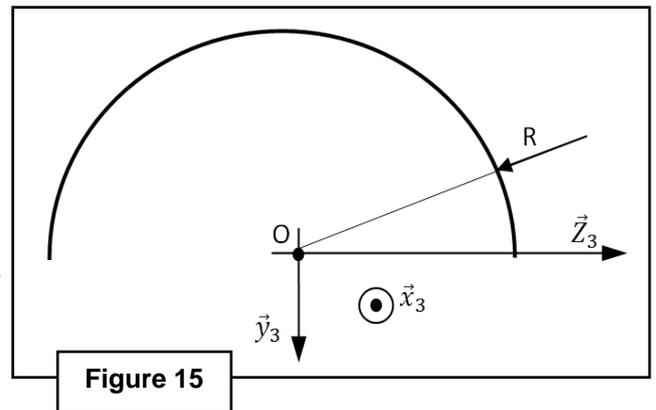
**CARACTERISTIQUES D'INERTIE DE L'ARCEAU 3**

**- Centre d'inertie :**

Pour cette question, On assimile l'arceau 3 à un demi cercle matériel de rayon  $R$ , homogène et de section négligeable (voir figure 15).

Soit  $G$  le centre d'inertie de l'arceau 3 tel que :

$$\vec{OG} = x_{G3}\vec{x}_3 + y_{G3}\vec{y}_3 + z_{G3}\vec{z}_3$$



**Question 17 :** Déterminer, par une méthode de votre choix, les coordonnées du vecteur  $\vec{OG}$  dans la base  $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ .

**- Moment d'inertie :**

Soit un demi-cylindre creux  $S$  homogène, de masse  $m$ , dont la géométrie est décrite par la figure 16.

**Question 18 :** Donner la matrice d'inertie  $I(O, S)$  dans la base liée au solide  $S$  en fonction de :  $m, R_1, R_2$  et  $h$ .

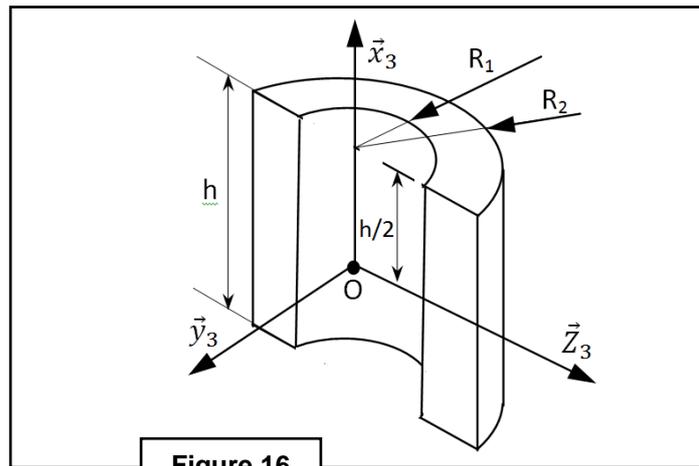
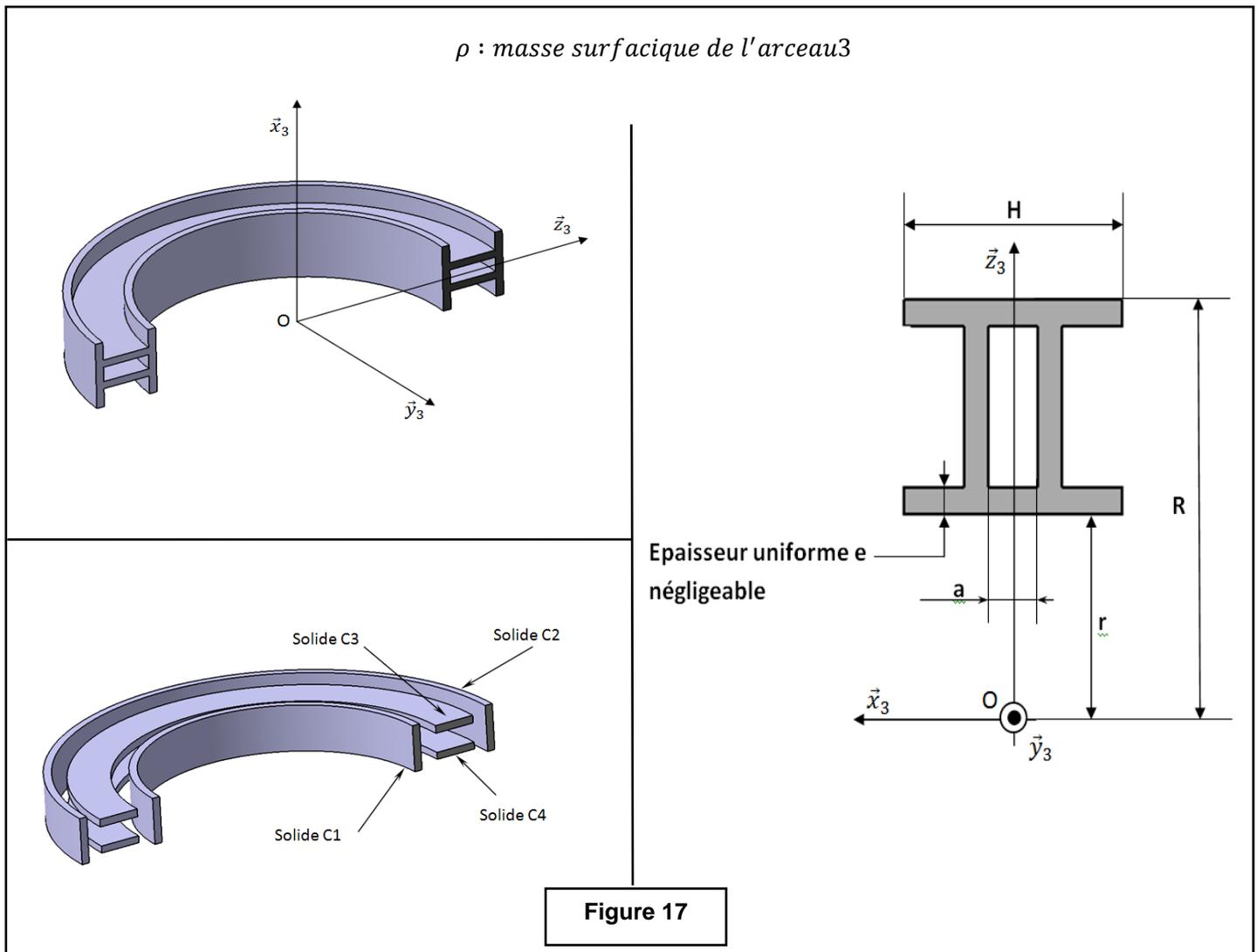


Figure 16

La forme simplifiée de l'arceau 3 et décrite par la figure 17.

**Question 19 :** A partir du résultat de la question 18, exprimer, en fonction de  $\rho, r, R$  et  $H$ , le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_3)$  de l'arceau 3 noté  $I_3$  (la figure 17 propose une décomposition de l'arceau 3 à suivre pour effectuer les calculs).



**EQUATION DE MOUVEMENT DU MOTEUR (voir figures 10 et 11)**

L'objectif de cette étude est de vérifier le dimensionnement du moteur choisi autour d'un point de fonctionnement.

On notera  $\omega_{mot}$  (en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ),  $\theta_{mot}$  (en rad) la vitesse de rotation et la position angulaire du rotor 4 par rapport au stator 2 du moteur.

Soit  $\mathbf{E}$  l'ensemble matériel :  $\mathbf{E} = \{ \text{rotor du moteur, vis sans fin 4, roue 5 et l'ensemble rigidement lié, la courroie crantée, galets presseurs 6 et 7, arceau 3} \}$ .

**Hypothèses et données .**

- Le frein à poudre n'est pas actif.
- L'inertie de la courroie est négligeable.
- Les inerties des galets presseurs 6 et 7 sont négligeables.
- $C_{mot}(t)$  : couple moteur instantané, qui s'exerce sur le rotor.
- $f_{ve}$  le coefficient de frottement visqueux associé au mouvement de rotation du rotor
- $C_r(t)$  le couple résistant, dû au frottement sec, du moteur.
- Les autres liaisons sont parfaites.
- On rappelle que :  $\alpha(t) = 0$ ,  $\beta(t) = 0$ .

Pour les applications numériques, on prend :

$$f_{ve} = 2,47 \cdot 10^{-3} \text{ N.m.s} \quad \text{et} \quad |Cr| = 1,55 \text{ N.m}$$

- $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  Le repère galiléen lié au bati 0. La pesanteur est telle que :

$$\vec{g} = -g\vec{z}_0 \quad \text{et} \quad g = 10 \text{ m.s}^{-2}$$

- Les caractéristiques de l'arceau 3 à considérer sont :

- $R_3 = (G_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  le repère lié à l'arceau 3.

- $G_3$  : le centre d'inertie de l'arceau 3 tel que

$$\overrightarrow{OG_3} = x_{G3}\vec{x}_3 + y_{G3}\vec{y}_3 + z_{G3}\vec{z}_3 = -127\vec{x}_3 - 100\vec{y}_3 + 231\vec{z}_3$$

(les autres solides sont dynamiquement équilibrés)

- La masse de l'arceau 3 est  $m_3 = 260 \text{ Kg}$

- Le mouvement de rotation de l'arceau 3 est défini par  $\gamma = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$

- la matrice d'inertie  $I(G_3, 3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{R_3} = \begin{pmatrix} 160 & 0 & 0 \\ 0 & 190 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$  en  $\text{kg.m}^2$

**Question 20 :**

- a. Exprimer l'énergie cinétique galiléenne de l'arceau 3.
- b. Exprimer l'énergie cinétique galiléenne du rotor.
- c. Exprimer l'énergie cinétique galiléenne de la roue 5 et l'ensemble rigidement lié
- d. Exprimer l'énergie cinétique galiléenne de la vis sans fin 4.

- e. En déduire l'expression et la valeur numérique du moment d'inertie équivalent de l'ensemble **E** ramené à l'axe de l'arbre moteur noté  $J_e$  tel que

$$T(E/RO) = \frac{1}{2} J_e \omega_{mot}^2$$

Pour la suite on prend :  $J_e = 8,2 \cdot 10^{-4} \text{ Kg.m}^2$ .

**Question 21** : Donner l'expression des puissances extérieure et intérieure au système **E** .

**Question 22** : Par application du théorème de l'énergie cinétique au système matériel **E** en phase d'accélération, exprimer  $C_{mot}(t)$  en fonction de :

$$\dot{\omega}_{mot}, \omega_{mot}(t), J_e, C_r(t), f_{ve}, m_3, g, y_{G3}, z_{G3}, \mu, k, \text{ et } \gamma(t)$$

**Question 23** : En considérant que la valeur de  $\gamma(t_5) = 18,5^\circ$  , Calculer la valeur de  $C_{mot}$  à l'instant correspondant à la fin d'accélération de la phase b ( $t_5$ ) .

**Question 24** : En déduire la valeur de la puissance du moteur nécessaire à cet instant. Conclure sur choix du moteur retenu.

#### 4.2 Evaluation des performances du système d'entraînement en rotation de 3 par rapport à 2.

Pour mieux maîtriser le positionnement du faisceau de rayons X par rapport au patient, le contrôle du déplacement angulaire de l'arceau 3 est essentiel. L'asservissement de position de l'arceau 3 fera l'objet de cette partie.

Le cahier des charges à respecter est :

- Erreur statique  $\epsilon_{sp}$  due à une perturbation : nulle
- Erreur statique  $\epsilon_s$  vis-à-vis de l'entrée : nulle
- Erreur de trainage  $\epsilon_T$  vis-à-vis de l'entrée : nulle
- Stabilité :
  - o marge de gain  $> 10\text{db}$
  - o Marge de phase  $\geq 45^\circ$

La figure 18 présente la structure fonctionnelle de la chaîne de commande de cet asservissement.

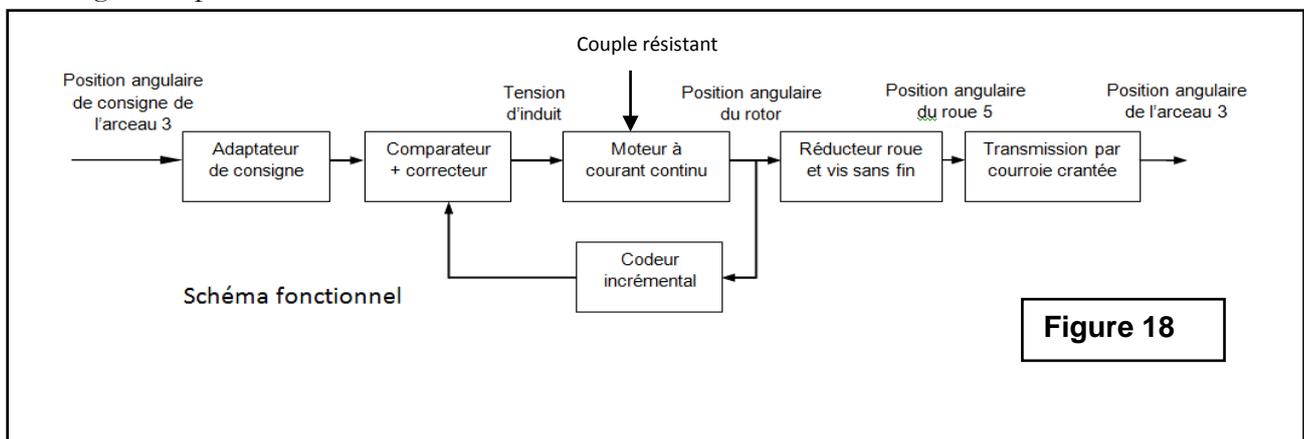


Figure 18

## Modélisation du moteur à courant continu

### Notation :

$i(t)$ : Le courant de l'induit (A)	$\omega_{mot}(t)$ : La vitesse de rotation du moteur ( $\text{rad.s}^{-1}$ )
$e(t)$ : La force contre électromotrice (V)	$c_{mot}(t)$ : Le couple moteur (N.m)
$u(t)$ : La tension aux bornes de l'induit (V)	$c_r(t)$ : le couple résistant (N.m)
$L$ : L'inductance de l'induit (H)	$R=1,44 \Omega$ : La résistance de l'induit (Ohm)
$K_i$ : constante de couple	$K_e$ : Constante de force contre électromotrice

L'équation de mouvement retenue pour cette partie est :

$$C_{mot}(t) = J_e \dot{\omega}_{mot}(t) + f_{ve} \cdot \omega_{mot}(t) + C_r(t) \quad (1)$$

L'équation électrique du moteur est :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + e(t) \quad (2)$$

Les équations du couplage mécanique-électrique sont :

$$e(t) = K_e \omega_{mot}(t) \quad (3)$$

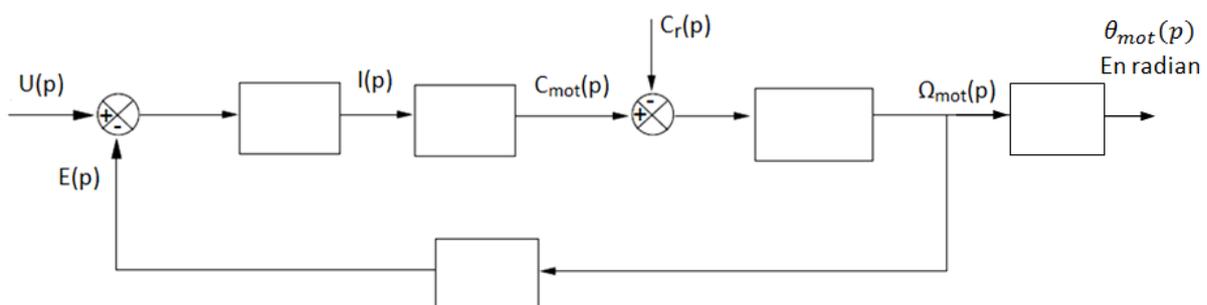
$$c_{mot}(t) = K_i i(t) \quad (4)$$

Les valeurs de  $K_i$  et  $K_e$  sont égales et on note pour la suite  $K_i = K_e = K_1 = 100$ .

Pour la transformée de Laplace on retiendra les notations suivantes :  $I(p)$ ,  $\omega_{mot}(p)$ ,  $U(p)$ ,  $C_{mot}(p)$ ,  $C_r(p)$  Pour les transformées de Laplace de, respectivement, des fonctions suivantes  $i(t)$ ,  $e(t)$ ,  $u(t)$ ,  $\omega_{mot}(t)$ ,  $c_{mot}(t)$ ,  $c_r(t)$ .

### Question 25 :

- Déterminer les fonctions de transferts associées au schéma bloc suivant (schéma bloc à reproduire et à compléter sur votre copie).



Pour la suite des questions l'inductance L sera négligée.

- b. A partir du schéma bloc de la question 25-a, déterminer, sous la forme canonique, les fonctions de transferts vis-à-vis de l'entrée  $U(p)$  notée  $H_u(p)$  et vis-à-vis de la perturbation  $C_r(p)$  notée  $H_r(p)$  telles que :

$$\Omega_{mot}(p) = H_u(p)U(p) - H_r(p) \cdot C_r(p)$$

### Asservissement du mouvement de l'arceau 3

Tenant compte du modèle retenu pour le moteur à courant continu, on obtient le schéma bloc suivant :

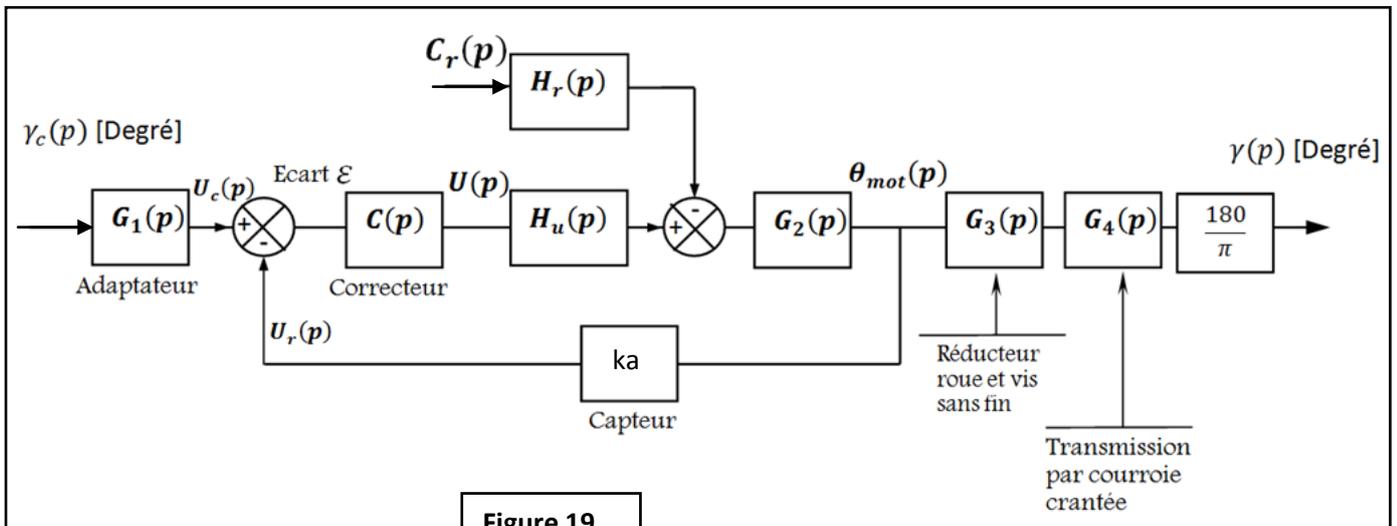


Figure 19

**Question 26 :**

- a. Donner les fonctions de transferts  $G_3(p)$  et  $G_4(p)$ .
- b. Proposer une fonction de transfert de l'adaptateur  $G_1(p)$  ; justifier votre réponse.

On considère que  $C(p)=1$ .  $H_u(p) = \frac{K_u}{1+T_u p}$ ,  $H_r(p) = \frac{K_r}{1+T_u p}$   
 avec  $K_u=10^{-2} \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$      $K_r=10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}/\text{N.m}$      $T_u=10^{-7} \text{ s}$     et  $ka \cdot k_u=1$

**Question 27 :** On suppose pour cette question que  $C_r=0$  :

- a. Exprimer et donner sous la forme canonique la FTBO notée  $T(p) = \frac{U_r(p)}{\epsilon(p)}$ .
- b. Le système est-il stable.

**Question 28 :**

- a- Calculer l'erreur statique  $\epsilon_s$  vis-à-vis d'une entrée échelon unitaire. Conclure.
- b- Calculer l'erreur statique  $\epsilon_{sp}$  vis-à-vis d'une perturbation échelon unitaire. Conclure.

**Question 29 :**

- a. Calculer l'erreur de trainage  $\epsilon_T$  due à une entrée rampe  $\gamma_c(t) = \gamma_0 \cdot t \cdot u(t)$ .  
Conclure.
- b. Un correcteur intégrateur pur  $C(p) = \frac{1}{p}$  permet-il de satisfaire le cahier des charges en terme de précision vis-à-vis de l'entrée ? justifier.
- c. Dans ce cas, donner l'erreur statique  $\epsilon_{sp}$  vis-à-vis d'une perturbation échelon unitaire.  
Conclure.
- d. Que devient la stabilité du système ? ( illustrer votre réponse en se basant sur le tracé asymptotique du diagramme de bode de la FTBO corrigée).

Considérons pour la suite le correcteur sous la forme suivante :

$$C(p) = \frac{1}{p} C_1(p) \quad \text{tel que} \quad C_1(p) = K_c \frac{1+aTp}{1+Tp} \quad \text{avec } a > 1$$

**Question 30 :**

- a. Tracer le diagramme de bode de  $C_1(p)$  pour  $K_c=1$  : faire apparaître clairement les asymptotes et les valeurs particulières.
- b. Compléter le tableau suivant( à reprendre sur votre copie) et préciser l'action de ce correcteur sur la stabilité et sur la précision (utiliser les mots : **améliore**, **diminue** ou **n'affecte pas** ).

	Stabilité	Précision
Le correcteur $C_1(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$ avec $a > 1$		

Le document réponse (figure DR6) présente le diagramme de Black de la FTBO corrigée

$$(C_1(p) = K_c \frac{1+aTp}{1+Tp} \text{ avec } K_c=1, a=8 \text{ et } 1 > T > Tu ), Cr=0.$$

**Question 31 :**

- a- Relever sur le diagramme de Black (document réponse figure DR6) la valeur de la marge de gain MG et celle de la marge de phase  $M\varphi$ .
- b- Déterminer la valeur de  $K_c$  permettant de respecter le cahier des charges en terme de stabilité (document réponse figure DR6).

*Fin de l'épreuve*

